第２講　図形と方程式

1　２点 P，Q は，放物線 $y=x^2$ 上を $\angle$POQ が直角であるように動く．ただし，O は原点である．

(1)　線分 PQ は定点を通ることを示せ．

(2)　線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a，b，c は 0 以上の実数とする．3 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(1,\ c)$ は，$\angle \mathrm{ABC}=30°$，$\angle \mathrm{BAC}=60°$ を満たす．

(1)　c を求めよ．

(2)　AB の長さの最大値と最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　x，y は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ とするとき，$\dfrac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値と最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

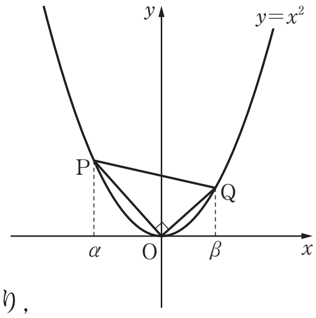
第２講　図形と方程式

1　2 点 P，Q は，放物線 $y=x^2$ 上を $\angle$POQ が直角であるように動く．ただし，O は原点である．

(1)　線分 PQ は定点を通ることを示せ．

(2)　線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

P$(\alpha,\ \alpha^2)$，Q$(\beta,\ \beta^2)$　$(\alpha<\beta)$　とする．



(1)　直線 OP の傾きは $\dfrac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$，直線 OQ の傾きは β である．

よって，条件より　$\alpha\cdot\beta=-1$　……①

直線 PQ の方程式は　$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$

つまり　$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

①より　$y=(\alpha+\beta)x+1$　よって，直線 PQ は定点 $(0,\ 1)$ を通り，

$\alpha<0<\beta$ より，これは線分 PQ 上にある．

(2)　PQ の傾き $\alpha+\beta$ を m とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2=\{(\beta-\alpha)\sqrt{1+m^2}\}^2=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}(1+m^2)=(m^2+4)(m^2+1)$$

$m^2\geqq0$ より，これが最小となるのは $m=0$ のとき

ゆえに，PQ の最小値は　$\sqrt{4\cdot1}=\mathbf{2}$

2　a，b，c は 0 以上の実数とする．3 点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(1,\ c)$ は，$\angle$ABC$=30^\circ$，$\angle$BAC$=60^\circ$ を満たす．

(1)　c を求めよ．

(2)　AB の長さの最大値と最小値を求めよ．

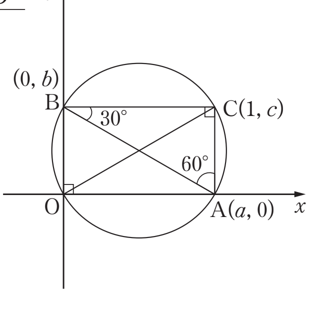
$\triangle$ABC は $\angle$C$=90^\circ$ の直角三角形より，AB を直径とする円に内接する．

また，$\angle$AOB$=90^\circ$ より点 O もこの円上にある．

(1)　$\angle$COA$=\angle$CBA$=30^\circ$ より直線 OC の方程式は　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

これに点 C$(1,\ c)$ の座標の値を代入して　$\boldsymbol{c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)　AB を直径とする円の方程式は　$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}$



つまり　$x^2+y^2-ax-by=0$

これに点 $\mathrm{C}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の座標の値を代入して

$$1+\frac{1}{3}-a-\frac{b}{\sqrt{3}}=0\qquad よって\quad b=\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}-a\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，a，$b \geqq 0$ より　$\dfrac{4}{3}-a \geqq 0$　　よって　$0 \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}$

したがって　$AB^2=a^2+b^2=a^2+3\left(\dfrac{4}{3}-a\right)^2=4a^2-8a+\dfrac{16}{3}=4(a-1)^2+\dfrac{4}{3}$ より

AB は　$a=0$，$b=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ で最大値　$\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

$a=1$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値　$\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$　をとる.

3　x，y は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ とするとき，$\dfrac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値と最小値を求めよ.

$\dfrac{2x-y+1}{x-y+3}=k$　……①　とおき，実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たすときの k の最大値，最小値を求める.

①より　$k(x-y+3)-(2x-y+1)=0$　これは点 $(2,\ 5)$ を通る直線を表す.

また，①は　$(k-1)y=(k-2)x+3k-1$　であり

$k=1$ のとき　$x=2$　これは $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たさず不適．よって $k \neq 1$ であることより

$y=\dfrac{k-2}{k-1}x+\dfrac{3k-1}{k-1}$　と変形できる.

この直線が円 $x^2+y^2=1$ と共有点をもつとき　$x^2+\left(\dfrac{k-2}{k-1}x+\dfrac{3k-1}{k-1}\right)^2=1$

$(k-1)^2x^2+(k-2)^2x^2+2(k-2)(3k-1)x+(3k-1)^2=(k-1)^2$

$(2k^2-6k+5)x^2+2(3k^2-7k+2)x+8k^2-4k=0$

この式の判別式を D とすると　$D \geqq 0$ より

$(3k^2-7k+2)^2-(2k^2-6k+5)(8k^2-4k) \geqq 0$

$7k^4-14k^3+3k^2+8k-4 \leqq 0$

$(k-1)^2(7k^2-4) \leqq 0$

$k \neq 1$ より　$-\dfrac{2}{\sqrt{7}} \leqq k \leqq \dfrac{2}{\sqrt{7}}$　これが k のとりうる値の範囲である.

ゆえに，$\dfrac{2x-y+1}{x-y+3}$ の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$，最小値は　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　原点を中心とする半径１の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする．A$(a,\ 0)$ と N$(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく．また，B$(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく．

(1)　P の座標を a で表せ．

(2)　AQ∥PB のとき，AN・BN＝2 となることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a は正の定数とする．点 $(x,\ y)$ は条件

$$a|x|+|y|\leqq a$$

を満たす．

(1)　$y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ．

(2)　$y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　原点を中心とする半径１の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする．A$(a,\ 0)$ と N$(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく．また，B$(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく．

(1)　P の座標を a で表せ．

(2)　AQ∥PB のとき，AN・BN＝2 となることを示せ．

(1)　直線 AN の方程式は　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{1}=1$　　つまり　$x=-ay+a$ である．

これと円 C：$x^2+y^2=1$ との交点の y 座標は　$(-ay+a)^2+y^2=1$

つまり　$(a^2+1)y^2-2a^2y+a^2-1=0$ の異なる２解．

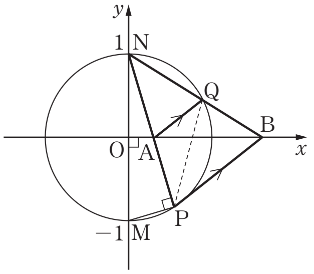
そのうち１解が１である．もう１解を α とすると，

解と係数の関係から　$1\cdot\alpha=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$　　よって　$\alpha=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

このとき　$x=-a\cdot\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+a=\dfrac{2a}{a^2+1}$　ゆえに　$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{2a}}{\mathbf{a^2+1}},\ \dfrac{\mathbf{a^2-1}}{\mathbf{a^2+1}}\right)$

(2)　M$(0,\ -1)$ とすると，△OAN∽△PMN より　AN：ON＝MN：PN

よって　AN・PN＝ON・MN＝1・2＝2　……①



①の式は比較的容易に出る．よって目的は PN＝BN，つまり∠APB＝∠NBP を示すこととなり，図形の検証に入ることができる．

ここで四角形 OAPM は円に内接することより

∠NMP＝∠PAB

また，四角形 NQPM もまた円 C に内接することより

∠NMP＝∠PQB

よって，∠PAB＝∠PQB より四角形 PAQB は円に内接する．

したがって，∠APB＝∠NQA であり，また AQ∥PB より，∠NBP＝∠NQA

よって，∠APB＝∠NBP であるから，△NPB は二等辺三角形である．

ゆえに，PN＝BN より，①から　AN・BN＝2

(1)と同様に Q の座標を求めて解答を進めることもできる．
その場合，「垂直」「平行」を扱う際には「ベクトル」も視野に入れて解答を進めるとよい．
ただし，ベクトルを用いる，用いないにかかわらず計算は煩雑になりやすい．図形，特に「円の性質」により長さや角度を扱う「平面図形」の知識を蓄えておこう．
大切なのは「目的意識」である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

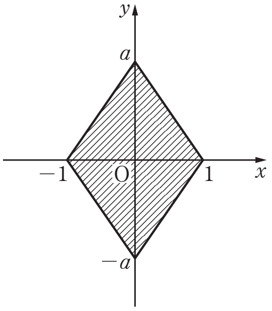
2 a は正の定数とする．点 $(x,\ y)$ は条件

$$a|x|+|y|\leqq a$$

を満たす．

(1) $y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ．

(2) $y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ．



$a|x|+|y|\leqq a$ は x 軸，y 軸に関して対称な図形であるから，
これを満たす点 $(x,\ y)$ の領域は右図斜線部分（境界含む）．
また，$y-(x+1)^2=k$ とおくと　$y=(x+1)^2+k$
よって，この放物線 C（軸：$x=-1$）が右図の領域と共有点を
もつときの頂点の y 座標 k について考える．

(1) k が最小になるのは放物線 C が $(1,\ 0)$ または $(0,\ -a)$ のいずれかを通るときである．

$(1,\ 0)$ を通るとき　$k=-4$　　$(0,\ -a)$ を通るとき　$k=-a-1$

$-4<-1-a$　となるのは　$a<3$ のとき

ゆえに　**$0<a<3$ のとき　最小値 -4　　$a\geqq 3$ のとき　最小値 $-a-1$**

(2) k が最大となるのは放物線 C が点 $(0,\ a)$ を通るとき，または，第2象限で領域の境界と接するときである．

$(0,\ a)$ を通るとき　$k=a-1$

また，接するときは　C と $y=ax+a$ より y を消去して x について整理した式

$x^2-(a-2)x+k-a+1=0$　が重解をもつときである．

よって　$(a-2)^2-4(k-a+1)=0$　　$k=\dfrac{a^2}{4}$

このとき，方程式は重解 $x=\dfrac{a-2}{2}$ をもつ．これが第2象限内にあるのは

$-1<\dfrac{a-2}{2}<0$　つまり　$0<a<2$ のときであり，$\dfrac{a^2}{4}$ はこのときのみ最大値の候補となる．

$a-1<\dfrac{a^2}{4}$ とすると　$a^2-4a+4>0$　　$(a-2)^2>0$　これは $a=2$ 以外のすべての a で成り立つ．

ゆえに　**$0<a<2$ のとき　最大値 $\dfrac{a^2}{4}$　　$a\geqq 2$ のとき　最大値 $a-1$**

> 講義で扱った通り，図形が描けないときはもちろん，描けるときでも状態が不明瞭な場合は確実に「検証」が必要となる．とくに境界線と「接する」ときには，境界線の存在範囲の中に接点が入っているかどうかをきっちりと確かめること．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。